

論文内容要旨 (和文)

平成30年度入学 大学院博士後期課程

地球共生圈科学専攻 数理科学分野

氏名 東根 一樹



論文題目

Criteria for the existence of a plane model with two Galois points for algebraic curves
(代数曲線に対するガロア点を2つもつ平面モデル存在の判定法)

1996年、吉原久夫氏は代数幾何学にGalois pointの概念を導入した。 C を標数 $p \geq 0$ の代数閉体 k 上の既約平面代数曲線とし、点 $P \in \mathbb{P}^2$ からの射影 $\pi_P: C \rightarrow \mathbb{P}^1; Q \mapsto \overline{PQ}$ を考える。ここで、 \overline{PQ} は異なる2点 P, Q を結ぶ直線を表す。 π_P が誘導する関数体の拡大 $k(C)/\pi_P^*k(\mathbb{P}^1)$ が Galois であるとき、 P を C の Galois point という。Galois point P が C の非特異点 (resp. 特異点、 C 上の点、 C に含まれない点) であるとき、 P を smooth Galois point (resp. non-smooth Galois point, inner Galois point, outer Galois point) という。

Galois point の理論において、2つ以上の Galois point をもつ平面曲線の重要性が認識されてきた。実際、2013年には、吉原氏、三浦敬氏、本間正明氏、深澤知氏の貢献により、2つ以上の Galois point をもつ非特異平面曲線が完全に分類された。深澤氏と長谷川武博氏は、無限個の inner Galois point をもつ平面曲線の分類を行った。無限個の outer Galois point の場合は、深澤氏により分類が与えられた。また、2つ以上の Galois point をもつ平面曲線は、非常に大きい自己同型群をもつことがある。さらに、有理点集合と Galois point の集合との関係性が指摘されている。Hermitian 曲線や Ballico-Hefez 曲線は、射影平面の有理点配置と Galois point 配置が一致するような例であり、これらの曲線からよい性質をもつ代数幾何符号が構成されている。

2016年、深澤氏は「非特異射影曲線の射影平面 \mathbb{P}^2 への双有理埋め込みで、(その像曲線が) smooth Galois point を2つもつようなものが存在するための必要十分条件」を与えた。この判定法は、自己同型群とその作用の観点から smooth Galois point を2つもつ平面モデルが存在するための必要十分条件を完全に記述している。この判定法を用いて、深澤氏、脇克志氏、著者により、smooth Galois point を2つもつ平面曲線の新たな例が構成された。この判定法が登場する以前は、smooth Galois point を2つもつような平面曲線の例は7タイプが知られているのみであった。

本学位論文では、上記深澤氏の判定法の商曲線および、non-smooth Galois point への2つの一般化を主に取り扱う。この2つの一般化は、それぞれ第3章と第4章で説明される。第5章において、Giulietti-Korchmáros 曲線に関する結果についても述べる。Giulietti-Korchmáros 曲線は、smooth Galois point, non-smooth Galois point をいずれも2つ以上もつ重要な例である。

以下、各章の具体的な内容について説明する。第2章では代数曲線とその関数体に関する基本的な結果について述べる。より具体的には、線形系の理論、Riemann-Hurwitz の分岐公式、Galois 被覆の基本性質について述べる。第2章の最後では、深澤氏の判定法について述べる。これらの結果は、主結果を導くために用いられる。

第3章では、smooth Galois point を2つもつ平面曲線(の非特異モデル)の商曲線に着目して、深澤氏の判定法を一般化する。深澤氏の判定法において、自己同型群が作用するような適切な有限集合を考えることが重要である。実際、有理点集合や、Weierstrass point の集合を用いて新たな例が構成されていた。しかしながら、一般にそのような適切な有限集合を新たに想定することには困難があった。この解決として、「非特異曲線 X が smooth Galois point を2つもつ平面モデルをもつ、という性質がある有限部分群 $H \subset \text{Aut}(X)$ による商曲線 X/H に伝播する」という現象の定式化が行われた。第3章ではこの観点を含んだ形のさらなる一般化として、 X が smooth Galois

point を 2つもつ平面モデルをもたない場合にも適用できる形で、深澤氏の判定法を一般化する。応用として、最大曲線(有理点の個数が Hasse–Weil 上限に達するような有限体上定義された代数曲線)の例として知られている、Giulietti–Korchmáros 曲線や Skabelund(によって構成された)曲線に対して、smooth Galois point を 2つもつ新たな例を構成する。

第4章では、non-smooth Galois point の体系的研究を見込んだ、深澤氏の判定法の一般化を行う。これまでの Galois point 研究において、non-smooth Galois point を 2つ以上もつのような平面曲線の例は時折見受けられる。例えば、Ballico–Hefez 曲線、ある自己双対曲線、Giulietti–Korchmáros 曲線(の平面モデル)、 (q^3, q^2) -Frobenius nonclassical 曲線、Artin–Schreier–Mumford 曲線などがある。しかしながら、これらの例は積極的に non-smooth Galois point を調べようとしたものではない。高橋剛氏は、2重点 P をもつ平面5次曲線 C に着目し、 P が Galois point であるときの C の定義方程式を決定した。著者が知る限り、この研究は non-smooth Galois point に焦点を当てた唯一の研究である。第4章では、深澤氏の判定法を(non-smooth Galois point の場合を含めた)すべての場合に拡張する。また、inner Galois point を 2つもつ平面曲線に対して、Galois point における重複度や、order sequence を Galois 群の情報を用いて詳細に記述する。さらに、これらの結果を \mathbb{P}^1 に適用する。これにより、non-smooth Galois point を 2つもつ平面有理曲線の例を 3つ与え、重複度、order sequence を計算する。

第3章において、Giulietti–Korchmáros 曲線の平面モデルが smooth Galois point を 2つ以上もつという事実を利用し、商曲線を考えることで smooth Galois point を 2つもつ新たな例が得られている。またこの平面モデルは、non-smooth Galois point も 2つ以上もつ。これら Giulietti–Korchmáros 曲線の平面モデルに関する事実は、第5章で述べる Giulietti–Korchmáros 曲線の Galois line 配置の決定に基づく。直線 $l \subset \mathbb{P}^3$ 、空間曲線 $C \subset \mathbb{P}^3$ に対して、直線 l 中心の射影 $\pi_l: C \rightarrow \mathbb{P}^1$ が誘導する関数体の拡大 $k(C)/\pi_l^* k(\mathbb{P}^1)$ が Galois であるとき、直線 l を曲線 C の Galois line という。この概念は、Galois point 概念の一般化として吉原氏により導入された。吉原氏、Cristina Duyaguit 氏、金沢光則氏によって、空間橢円曲線の Galois 直線配置が調べられた。第5章では、Giulietti–Korchmáros 曲線の Galois line 配置を決定し、その応用として平面モデルの Galois point 配置を決定する。

論文内容要旨（英文）

平成30年度入学 大学院博士後期課程

地球共生圏科学専攻 数理科学分野

氏名 東根 一樹



論文題目

Criteria for the existence of a plane model with two Galois points for algebraic curves

Let k be an algebraically closed field of characteristic $p \geq 0$. In 1996, Hisao Yoshihara introduced the notion of Galois points. A point $P \in \mathbb{P}^2$ is called a Galois point for a curve $C \subset \mathbb{P}^2$ if the field extension $k(C)/\pi_P^*k(\mathbb{P}^1)$ induced by the projection π_P with the center P is Galois. A Galois point P is called a smooth Galois point (resp. a non-smooth Galois point, an inner Galois point) if P is a smooth point of C (resp. a singular point of C , a point contained in C).

In the theory of Galois points, plane curves with two or more Galois points are important. In 2016, Satoru Fukasawa presented a criterion for the existence of a birational embedding of a smooth projective curve into \mathbb{P}^2 with two smooth Galois points. By this criterion, new examples of plane curves with two smooth Galois points were obtained.

In Chapter 2, we recall the basic notion and facts about algebraic curves and their function fields. Fukasawa's criteria are described at the end of Chapter 2.

In Chapter 3, a generalization of Fukasawa's criterion by focusing on a quotient curve of a plane curve with two smooth Galois points is presented. We apply this result to

the Giulietti-Korchmáros (GK) curve and the curves constructed by Skabelund, and present new examples of plane curves with two smooth Galois points using these curves.

In Chapter 4, Fukasawa's criterion is extended to all cases with two (possibly non-smooth) Galois points. For a plane curve with two inner Galois points, multiplicities and order sequences at Galois points are also described in detail. As applications of these results, three examples of plane rational curves with two non-smooth Galois points are presented.

The GK curve is an important example with many smooth Galois points and non-smooth Galois points. In Chapter 5, the arrangement of all Galois lines for the GK curve is determined. The notion of Galois lines for a curve $C \subset \mathbb{P}^3$ is a generalization of the notion of Galois points. As an application, the arrangement of all Galois points for the GK curve is determined.

学位論文の審査及び最終試験の結果の要旨

2021年 1月 27日

理 工 学 研 究 科 長 殿

課程博士論文審査委員会

主査	深澤 知	印
副査	奥間 智弘	印
副査	塩見 大輔	印
副査	新井 真人	印

学位論文の審査及び最終試験の結果を下記のとおり報告します。

記

論文申請者	地球共生圏科学専攻・数理科学分野 氏名 東根 一樹		
論文題目	Criteria for the existence of a plane model with two Galois points for algebraic curves (代数曲線に対するガロア点を2つもつ平面モデル存在の判定法)		
学位論文審査結果	合格	論文審査年月日	2021年 1月 20日～ 2021年 1月 27日
論文公聴会	2021年 1月 27日	場所	オンライン (Google Meet)
最終試験結果	合格	最終試験年月日	2021年 1月 27日

学位論文の審査結果の要旨 (1,000字程度)

本学位論文のテーマは吉原久夫氏により導入された Galois point に関するものである：射影平面曲線 C に対し，平面内の点 P 中心の射影が誘導する関数体の拡大が Galois であるとき，P を C の Galois point という。本論文では「深澤知氏による，Galois point を2つもつ平面モデル存在の判定法」(以下，判定法)の2種類の一般化について述べられている。さらに関連する結果として Giulietti-Korchmáros 曲線(以下，GK 曲線)の Galois line 配置について述べられている。以上の学術的成果は3, 4, 5章で述べられている。第1章は全体のイントロダクションであり、第2章では3章以降の結果を導出するのに必要な予備知識を整理している。

第一の一般化は「商曲線への一般化」であり、第3章で述べられている。Galois point を2つもつ曲線の商曲線が再び Galois point を2つもつという状況を統一的に扱う視点での判定法の一般化に成功している。例の構成に、代数幾何符号に応用のある、最大曲線を用いている。第5章で性質が整理される GK 曲線は最大曲線の重要な例として認知されている。この曲線は一般化された判定法の良い実験場となっている。第二の一般化は「non-smooth Galois point への一般化」であり、第4章で述べられている。この研究では、複数の non-smooth Galois point の体系的研究を見込んだ判定法の一般化が行われている。これにより、研究の少なかった non-smooth Galois point の状況をかなり詳細に記述することに成功している。

以上3つの研究、つまり2つの一般化と GK 曲線の研究について、3つの論文が学術雑誌に掲載または掲載決定済みであり、その新規性・独自性が既に公に認められている。特に第二の一般化に関する論文は単著である。第一の一般化は、Galois point 研究の発展のみならず「最大曲線」研究との関係性を発展させている意味で重要である。第二の一般化は、Galois point 研究者達が手を出しあげていた non-smooth Galois point に対する貢献で、新境地を単独で切り拓いたと言える。学位論文ではそれら新規性、学術的背景、研究目的が正しく述べられている。論文の構成は適切で、文献引用を含め体裁が整っている。また、記述が論理的で、結論が明確に述べられている。以上により、博士の学位論文として「合格」と判定した。

本論文は、研究倫理又は利益相反等に係る学内規則に基づく手続きは必要ありません。

最終試験の結果の要旨

最終試験は公聴会終了後、対面で、口頭により行った。学位論文の内容と数学の専門知識に関して、質疑応答を行った。質問に対して適切な回答が得られ、博士の学位を授与するのに十分な知識と能力を有することが確認できた。

以上により、最終試験について「合格」と判定した。