論文内容要旨（和文）

平成２１年度入学　大学院博士後期課程
地球共生圏科学専攻　　　数理科学分野
氏　　名　　　張　暁宇　　　印

論文題目　Higher Order Numerical Methods and Their Numerical Analysis for Elliptic Boundary Value Problems
(楕円型境界値問題に関する高次精度数値解法とその数値解析)

物理学、化学、生物学、工学などの自然科学分野や金融学、経済学などの人文科学分野において、様々な現象の数理モデルは常微分方程式と偏微分方程式で記述されている。これら微分方程式の解析的な解はほとんど求められないので、コンピュータにより数値的に解を求めることは科学の各分野から要求されている。コンピュータの性能が著しく進歩してきているが、天気予報のための計算、地球内部構造の解明や地震予測のための計算、脳科学の研究により脳活動のシミュレーションなどで分かるように、計算の規模が大きくなる一方である。そのため、計算時間の短縮とメモリの節約の観点から、高精度の数値解法の開発とその数値解析に関する研究は、数学やコンピュータ科学の理論上においても科学技術の計算上においても、重要な課題となっている。特に、微分方程式の数値解法に対して、真の解が境界層、内部層、インターフェースなどの特異性を持つ場合はよくあるので、今までの空間等分割より非一様分割に基づく方法は高精度の数値解法上で大きな意味を持っている。本論文では、１次元の非線形２点境界値問題と２次元のディリクレー境界値問題に対して、非一様な空間分割に基づく新しい有限差分スキームを提案したり、より高精度の有限差分スキームを提案した。これら有限差分スキームに対して、数値解析を行うことにより、誤差評価を与えた。さらに、数値実験を行うことにより、提案した有限差分スキームの収束性や有効性を示した。本論文は４章に分かれている。

第１章では、準備知識として、コンパクト有限差分法、Shortley-Weller 法と Swartztrauber-Sweet 法および行列解析学の中のいくつかの概念や既知結果の紹介を行った。

第２章では、基本境界条件をもつ非線形２点境界値問題に対して、新しい２次精度の有限差分法を提案し、その２次収束性の誤差解析を行った。１９８８年に、Ascher, Mattheij and Russell は線形２点境界値問題に対して、普通の中心差分法と異なる新しい差分スキームを提案した。数値結果からこの差分法が２次収束する予想はされたが、当時証明はできなくて、オープン問題となっていた。その後、YamamotoやFangの研究によって厳格的な証明は示された。本章では、Ascher, Mattheij and Russell の線形２点境界値問題に対するアイディアを拡張し、２階の微分方程式を１階の連立系に書き直して格子点の中点における中心差分公式と３点における Lagrange 補間公式を使うことによって、非線形２点境界値問題の新しい有限差分法を提案し、２次収束することを示した。

第３章では、基本境界条件でもよい自然境界条件でもよいもっと一般的な境界条件を持つ非線形２点境界値問題に対して、６次精度の有限差分スキームを提案した。この６次精度の差分スキームは次のアルゴリズムによって構成される。

(10pt 2,000字程度 2頁以内)

氏　　名　張　暁宇

まず空間非一様な分割において、3次のコンパクト有限差分スキームで問題の近似解を求める。得られた近似値を使ってスプライン補間で空間上の関数 $u^{(0)}(x)$ を構成する。その後、$u^{(0)}(x)$ におけるもとの非線形微分方程式の線形化問題を考える。この線形化問題の解はもとの非線形問題の解に6次の精度で近似することを示した。この線形化手法は、本質的には関数空間において1回のニュートン法を使うことにあたる。最後に、線形化問題の6次精度の近似解を求める。そのために、解を表現するグリーン公式に6次精度の数値積分公式、さらに離散的なグリーン関数を求めるには6次精度のルンゲ・クッター法を使う。いくつかの数値例を示した。これらの数値結果から分かるように、3次精度のコンパクト差分スキームより提案した6次精度のスキームが計算量が多いが、同じ精度の近似解を求めるために、提案した6次精度の方法は短い時間で済む。また、3次精度のコンパクト差分スキームは13桁の有効精度しか得られないに対して、提案した6次精度は15桁の有効精度まで計算できる。これは倍精度計算では限界に達している。

第4章では、特異性の解を持つ空間2次元の円盤上のディリクレー境界値問題を考えた。円盤の境界において、真の解の微分は発散する特異性があり、4階までの微分の発散度はパラメータ σ のある条件を満たすとする。この問題に対して、極座標で r 方向にはパラメータ p をもつ伸長関数を使うことによって非一様な空間分割を構成し、θ 方向には等分割を構成した。この非一様な空間分割における Swartztrauber-Sweet スキームは非整合性を持ちます。つまり、境界に近い格子点において、差分スキームの打ち切り誤差は無限大に発散する。通常の誤差解析によると近似解の誤差も発散するが、我々は行列解析学のアプローチを用いて、近似解の収束性を示した。さらに、パラメータ p を選ぶことによって収束を加速することもできる。これらの結果はパラメータ p を選ぶことによって最善の収束次数が存在することを示唆する。この示唆は、行った数値実験によって示された。さらに、この章では非整合性をもつ Swartztrauber-Sweet スキームの安定性を考察した。通常の条件数の定義を使うと、Swartztrauber-Sweet スキームから得た離散行列の条件数がものすごく大きくて、離散線形システムを解いた解は不安定であろうと意味するが、誤差解析の結果と数値実験の結果とは一致していない。離散線形システムの右辺を使う上件数の再定義、つまり有効条件数を使うと、条件数が著しく減少し、離散線形システムの安定性を数値実験で実証した。

論文内容要旨（英文）

平成２１年度入学　大学院博士後期課程
地球共生圏科学専攻　数理科学分野
氏　名　張　暁宇　印

論文題目　Higher Order Numerical Methods and Their Numerical Analysis for Elliptic Boundary Value Problems

In practical life, ordinary and partial differential equations (ODEs/PDEs) are used in mathematical modeling to simulate many natural phenomena, which arise in many applied fields of physics, chemistry, biology, engineering. Since analytical solutions cannot be obtained for many differential equations, it needs to solve them numerically. In this paper, we are concerned with the numerical methods by computer to solve boundary value problems (BVPs) of second order elliptic differential equations. We propose new and higher order finite difference methods for spatially one-dimensional nonlinear two-point BVPs and for spatially two-dimensional Dirichlet BVPs together with error analysis. The paper is divided into four chapters.

In Chapter 1, we mainly introduce some numerical methods for solving BVPs in second order ODEs/PDEs and introduce some known matrix analysis results.

In Chapter 2, we propose a new Ascher-Mattheij-Russell type FDM for nonlinear two-point BVP with Dirichlet boundary conditions. Under some hypotheses on the given functions, we obtained the convergent result of second order accuracy for our FDM. Furthermore, by exploring the proof, we can show that the approximate values at those partitioned points, which are of fixed numbers and near a and b, have third order accuracy.

Next, in Chapter 3, we propose a new FDM of sixth order accuracy for nonlinear two-point value problems with general boundary conditions. We provide a brief algorithm of our numerical scheme and show some numerical examples to illustrate our scheme. We note that much amount of computation is reduced for linear two-point BVP.

（12pt シングルスペース 300 語程度）

氏　　名　張　暁宇

Finally, in Chapter 4, we are concerned with the Dirichlet BVP of elliptic equations on a disk. We assume that the exact solution of the problem has singularity, which means that derivatives of the exact solution are unbounded on the boundary of the disk. By using a stretching polynomial-like function with a parameter, we construct an adaptive Swarztrauber-Sweet method with respect to polar coordinates. We give its error estimates by using an improved matrix analysis approach and show that the approximate solution is convergent, although the method has singular properties both at the origin and the boundary. Furthermore, the convergence can be accelerated by choosing appropriate values of the parameter in the stretching function. The best convergent order can be achieved by adjusting the parameter, which is illustrated by numerical results. Moreover, we show that the discrete system can be considered as a stable one by exploring the concept of the effective condition number.