令和6年度山形大学入学者選抜試験【解答例】
前期日程　数学
工学部昼間コース　情報・エレクトロニクス学科
機械・システム工学科
工学部フレックスコース　システム創成工学科

令和6年度入学者選抜試験　数学（工学部）解答例

[1] (1) $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2+2x+3}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{(x^2+2x+3)'}{x^2+2x+3}\,dx = \underline{\frac{1}{2}\log(x^2+2x+3)+C}$. ただし，$C$ は積分定数である．

(2) $\underline{(x,y)=(3,5)}$.

(3) $\cos 2\theta - 3\sin\theta + 1 = 0 \iff (2\sin\theta - 1)(\sin\theta + 2) = 0 \iff \sin\theta = \dfrac{1}{2}$.　$\therefore\quad \theta = \underline{\dfrac{\pi}{6}}$.

[2] (1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = 0$ より，$\angle\mathrm{POQ} = \underline{\dfrac{\pi}{2}}$.

(2) $\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = (4-3t, -3-4t)$ より，$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}| = \underline{5\sqrt{1+t^2}}$.

(3) $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}| = 5t$, $|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}| = 5$ および $\angle\mathrm{POQ} = \dfrac{\pi}{2}$ より，$\triangle\mathrm{OPQ} = \dfrac{25t}{2}$.

一方，円 C の半径を r とおくと，$\triangle\mathrm{OPQ} = \dfrac{r}{2}(|\overrightarrow{\mathrm{OP}}| + |\overrightarrow{\mathrm{OQ}}| + |\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|)$. 故に，$\underline{r = \dfrac{5t}{1+t+\sqrt{1+t^2}}}$.

(4) (i) $S = \left(1-\dfrac{\pi}{4}\right)r^2 = \underline{\left(1-\dfrac{\pi}{4}\right)\left(\dfrac{5t}{1+t+\sqrt{1+t^2}}\right)^2}$.

(ii) $\displaystyle\lim_{t\to\infty} r = \frac{5}{2}$ より，$\displaystyle\lim_{t\to\infty} S = \left(1-\frac{\pi}{4}\right)\lim_{t\to\infty} r^2 = \underline{\frac{25}{4}\left(1-\frac{\pi}{4}\right)}$.

[3] (1) (i) $t = 2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$ より，$\underline{-2 \leqq t \leqq 2}$.　(ii) $\underline{y = t^2 + (1-\sqrt{3})t - \sqrt{3}}$.

(2) 関数 $y = \left(t + \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \dfrac{2+\sqrt{3}}{2}$　$(-2 \leqq t \leqq 2)$ は $t = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$ のとき最小値 $-\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}$ をとり，$t=-2$ のとき最大値 $2+\sqrt{3}$ をとる．故に，y の値の範囲は，$\underline{-\dfrac{2+\sqrt{3}}{2} \leqq y \leqq 2+\sqrt{3}}$.

(3) $\underline{x = \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{2}, \pi, \dfrac{5}{3}\pi}$.

[4] (1) 証明略. (2) 証明略.

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\log b_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{k}{n}\right) = \int_1^2 \log x\,dx = 2\log 2 - 1$ であるから，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = \underline{\frac{4}{e}}$