論文内容要旨（和文）

平成２２年度入学　大学院博士後期課程
地球共生圏科学専攻　　　数理科学分野
氏　　名　　　和泉　孝志　　　印

論 文 題 目　Bounded linear operators on Morrey spaces
(Morrey 空間上の有界線形作用素)

博士後期課程での研究対象は，Morrey 空間の関数空間としての性質を研究することと，その上での有界線形作用素について研究することである．

1938年に Morrey は，2階楕円型偏微分方程式の解の局所的な振る舞いなどを調べるために関数空間を導入した．これが現在，Morrey 空間とよばれているもので，$1<p<\infty$，$0\leqq\lambda<1$ のとき，

$$\|f\|_{L^{p,\lambda}} = \sup_{Q\subset R^n, Q:\text{球}} \left(\frac{1}{|Q|^{\lambda}} \int_Q |f(y)|^p \, dy \right)^{1/p} < \infty$$

をみたす関数 f からなる関数空間である．この Morrey 空間は，$\lambda=0$ のときに，L^p 空間となるので，L^p 空間の性質の観点からも Morrey 空間について考察することが可能である．

学位論文では，まず，Morrey 空間の関数空間としての性質について研究を行なった．次に，L^p 空間上の Fourier multiplier と類似の性質について調べた．更に，重みつき Morrey 空間上での分数べき積分作用素について研究した．これら3つの研究内容について，以下に述べる．p と λ を $1<p<\infty$，$0<\lambda<1$ とし，q を p の共役指数とする．また，$M(X,Y)$ を平行移動不変な関数空間Xから平行移動不変な関数空間Yへの平行移動不変な有界線形作用素の集合とする．

1986年に Torchinsky は，単位円上で Morrey-Campanato 空間を定義し，その性質を考察した．1997年に Kufner も同様の考察を行なっている．Morrey-Campanato 空間は，$1<p<\infty$，$0\leqq\lambda<\infty$ のとき

$$\|f\| = \|f\|_{L^p} + \sup_{I\subset T, I:\text{区間}} \left(\frac{1}{|I|^{\lambda}} \int_I |f(y)-f_I|^p \, dy \right)^{1/p} < \infty$$

をみたす関数 f からなる関数空間である．$\lambda=0$ のときは L^p 空間，$0<\lambda<1$ のときは Morrey空間，$\lambda=1$ のときは BMO 空間，$1<\lambda<1+p$ のときはリプシッツ空間，$\lambda=1+p$ のとき，関数 f は絶対連続，$\lambda>1+p$ のとき，関数 f は定数関数となる．このうち，Morrey 空間の関数空間としての性質に関して，1986年に Zorkoは，Morrey 空間

氏　　名　和泉　孝志

$L^{p,\lambda}$の predual である Zorko 空間 $Z^{q,\lambda}$を導入した．$L_0^{p,\lambda}$を単位円上の連続関数の Morrey 空間 $L^{p,\lambda}$における閉包とする．本論文では，まず $L_0^{p,\lambda}$の関数空間としての性質に関してよく知られている，$BMO-H^1-VMO$ の関係との類似の性質を研究した．2012年に Adams-Xiaoは，この関係と同様に，$L_0^{p,\lambda}$の dual が $Z^{q,\lambda}$となることを指摘した．しかしその証明は与えられていなかった．本論文では，$L_0^{p,\lambda}$の dual が $Z^{q,\lambda}$となることを Coifman-Weiss の方法を用いて証明している．

次に Fourier multiplier に関して，1970年に Figa-Talamanca-Gaudry が $M(L^p, L^p)$ の性質として，$M(L^p, L^p) \neq M(L^q, L^q)$ $(1 \leq p < q \leq 2)$ となることを示した．

本論文では，単位円上の L^p空間とMorrey 空間 $L^{p,\lambda}$との包含関係について調べ，Figa-Talamanca-Gaudry の結果の類似である，$M(L^p, L^{p,\lambda})$ の性質を Dirichlet 核と Rudin-Shapiro 多項式を用いて示した．更に，$M(L^p, L^{p,\lambda})$ と Lipschitz 条件の関係についても述べている．

また，n次元ユークリッド空間上の重み付き Morrey 空間上での分数べき積分作用素に関して，1974年に Muckenhoupt-Wheeden が，1975年に Adams が，それぞれ重み付き L^p空間及び Morrey 空間で，分数べき積分作用素の有界性を研究した．このうち，Adams の結果については，1987年に Chiarenza-Frasca が別証明を与えている．2009年に Komori-Shirai はこの結果に注目し，重み付き Morrey 空間での分数べき積分作用素の有界性を証明した．本論文は，Muckenhoupt-Wheeden, Adams 及び Komori-Shirai の3つの結果を含む改良を与えた．また，重み付き Morrey 空間における多重線形分数べき積分作用素の有界性についても述べている．

本論文は以下のように構成される:

1章　単位円上の Morrey 空間のいくつかの性質について

2章　単位円上の L^p空間から Morrey 空間への Fourier multiplier について

3章　重み付き Morrey 空間上での分数べき積分作用素について

学位論文の審査及び最終試験の結果の要旨

平成２６年２月１３日

理 工 学 研 究 科 長　殿

課程博士論文審査委員会
主査　佐 藤 圓 治　㊞
副査　方　青　㊞
副査　中 島 和 夫　㊞
副査　小 林 政 晴　㊞
副査　㊞
副査　㊞

学位論文の審査及び最終試験の結果を下記のとおり報告します。

記

１．論文申請者
　専攻名　地球共生圏科学専攻
　氏　名　和 泉 孝 志

２．論文題目（外国語の場合は，その和訳を併記する。）

Bounded linear operators on Morrey spaces
（Morrey 空間上の有界線形作用素）

３．審査年月日
　論 文 審 査　平成２６年１月２９日　～　平成２６年２月７日
　論文公聴会　平成２６年２月７日
　　場所　理学部１号館　12 番講義室
　最 終 試 験　平成２６年２月７日

４．学位論文の審査及び最終試験の結果（「合格」・「不合格」で記入する。）
(1) 学位論文審査　合 格
(2) 最 終 試 験　合 格

５．学位論文の審査結果の要旨（1,200 字程度）
　別紙のとおり

６．最終試験の結果の要旨
　別紙のとおり

別　紙

専攻名	地球共生圏科学専攻	氏名	和　泉　孝　志

学位論文の審査結果の要旨

学位論文では，Morrey 空間の関数空間としての性質と Morrey 空間上の有界線形作用素を中心に研究を行っている．Morrey 空間は，1938 年に，Morrey が 2 階楕円型偏微分方程式の解の局所的な挙動の研究を行った論文に端を発した関数空間である．その後，この空間は，Lp 空間の一般化になっていることもあり，関数空間としての立場からも研究が行われている．1986 年に，Torchinsky が，自著で単位円上の Morrey 空間を定義し，BMO 空間の一般化である Morrey-Campanato 空間の特別な場合として述べている．

本学位論文の第 1 章では，単位円上の Morrey 空間の関数解析的な研究を行っている．1986 年に，Zorko は，双対空間が Morrey 空間となるような関数空間 Z(p, λ)を導入し研究した．2012 年に，Adams-Xiao が，双対空間が Z(p, λ)となる空間 L0(p, λ)を指摘したが，証明については，述べていなかった．第 1 章では，この結果について，1977 年の Coifman と Weiss の論文の方法である atom 分解を使うことにより証明を与えている．

また，1970 年に，Figa-Talamanca と Gaudry が，Lp 空間上の平行移動不変な有界線形作用素の空間について、論じている。第 2 章では、Morrey 空間が Lp 空間の一般化であることを考え，Lp 空間から Morrey 空間への平行移動不変な有界線形作用素の空間について同様の結果を研究している．最近，多次元ユークリッド空間上の Morrey 空間については，特異積分作用素や分数冪積分作用の有界性の研究が多く行われている．第 3 章では，重み付き Morrey 空間上での分数冪積分作用素について，Adams の定理に結びつけて Komori-Shirai の結果を改良している．

このように本研究では，Morrey 空間の関数解析的な研究や Lp 空間上の平行移動不変な有界線形作用素空間に関する結果の Morrey 空間への一般化，及び分数冪積分作用素に関する結果の改良を得ている．

本研究の成果をまとめた論文は，第 1 章及び第 2 章の主な内容は，数学の専門学術誌 Tokyo Journal of Mathematics に掲載が決定しており，第 3 章の主な内容は，数学の専門学術誌 Scientiae Mathematicae Japonicae の online 版で公表されている．

Morrey 空間の研究は，調和解析の分野の観点から，また偏微分方程式への応用などの観点からも興味がある．その中で，本学位論文の第 1 章の内容は、特異積分作用素の有界性の研究に新たな材料を提供する．第 2 章の内容は，Morrey 空間の平行移動不変な有界作用素についての独自の研究であり，今後，Littlewood-Paley の理論の見地から発展が期待される．第 3 章の内容は，Adams の結果と結びついた重み付き空間での分数冪積分作用素の統一的な結果である．このように Morrey 空間及びその上の作用素の研究において，本学位論文は、独自性があり，有用な知見を含んでいる．

以上のことから，本学位論文は，博士（理学）学位論文としての水準を満たしていると判断し，合格と判定した．

最終試験の結果の要旨

本学の規定に従い，本学位論文の内容を中心とした 60 分の口頭発表と質疑応答，及び研究分野に関する口頭試問による最終試験を実施した．その結果，本学位申請者は，研究に対する進め方，研究上の関連する知識，学術的能力など，博士（理学）として必要とされる能力を有していると認め，最終試験を合格と判定した．