

## 論文内容要旨 (和文)

氏名 竹内 雅陽



論文題目 共変的異常項と整合的異常項との関係に対するヒートカーネルの方法による解析

現在知られている素粒子間の基本的な4つの相互作用はすべてゲージ理論で記述される。また、これらの力を統一しようとする大統一理論や高次元の理論でもゲージ理論による記述が基本となる。

われわれの世界は、弱い相互作用でみるように、カイラルな(左右非対称な)物質場から構成されている。このような物質場がゲージ相互作用をする場合には、ゲージ理論の出発点であるゲージ対称性が量子論で成り立たなくなる。これを、ゲージ異常項という。また、高次元時空では、一般相対論の根幹となる一般座標変換不変性も量子論で破れることがある(重力異常項という)。統一理論を構築するには、このような異常項があつては困るので、種々の物質場からの異常項への寄与が相殺されているものを考えることになる。この異常項の相殺条件は理論を構築する上での重要な制限となる。

ゲージ異常項は共変的異常項、あるいは整合的異常項のうちのどちらか一方の捉え方で記述される。共変的異常項は共変的カレント(共変的に正則化されたカレントの期待値)の共変微分による発散で与えられる。一方、整合的異常項は正則化された有効作用のゲージ変換として与えられる。これはまた、有効作用から求められるカレントの期待値である整合的カレントの共変微分による発散として表すこともできる。整合的異常項はWess-Zuminoの整合性条件を満たさなければならない。

ゲージ理論としての整合性は上述の異常項の捉え方に依存するべきではなく、二つは同等でなくてはならない。実際、二つの捉え方は異常項に対し同一の相殺条件を導くという意味で同等であることが知られている。BardeenとZuminoは代数的方法を用いてこの同等性の一般的な証明を与えた。彼らの方法は具体的なラグランジアンを必要としないのでモデルに依存しない結果を与える。ラグランジアンに基づく場の理論的方法を用いた同等性の議論も行われている。Banerjeeらは正則化された有効作用を共変的なカレントを用いて定義することにより同等性の証明を試みた。

Banerjeeらの方法は次の通りである。まず、共変的カレントを用いて正則化された有効作用を定義する。この作用から整合的カレントを求める。こうして、Banerjeeらは共変的カレントと整合的カレントの差を共変的カレントのfunctional curlで表した。彼らはこのfunctional curlがデルタ関数に比例するというを議論した。そして、このことを用いることによって共変的異常項と整合的異常項との関係式を導出した。彼らが導出した関係式はBardeenとZuminoらのものと一致するが、functional curlがデルタ関数に比例することについては明確に説明されていない。したがって、functional curlの振る舞いをより明確に示すことが望まれる。

FujikawaとSuzukiはfunctional curlがデルタ関数に比例するというをフォーマルなレベルで証明した。

共変的カレントと整合的カレントの差については、functional curlを用いずに行われた研究もある。OsabeとSuzukiは共変的カレントと整合的カレントを異なる指数関数型の正則化因子を用いて定義し、それらのカレントの差を議論した。

本学位論文の第一部では、ゲージ異常項について述べた。異常項を求める手法としてヒートカーネルの方法がある。これまでこの方法は異常項のような1点関数の計算などでは用いられてきたが、functional curlのような2点関数には用いられてこなかった。本論文ではfunctional curlにもこの方法が適用できることを示し、具体的にfunctional curlの値を求めることに成功した。得られた結果はBanerjeeらやFujikawaらの結果を再現する。この結果は任意の偶数次元においてfunctional curlがデルタ関数型の振る舞いの直接的な別証明を与える。また、OsabeとSuzukiの共変的カレントと整合的カレントの差を計算するためにもfunctional curlに対して開発したヒートカーネルの方法を適用することができ、具体的に2次元と4次元でこの差の値を求めることに成功した。計算した結果はBardeenらやBanerjeeらの結果を再現する。

本学位論文の第二部では、重力異常項について述べた。重力異常項も共変的異常項、あるいは整合的異常項のうちのどちらか一方の捉え方で記述される。共変的異常項は共変的に正則化されたエネルギー運動量テンソルの期待値（共変的エネルギー運動量テンソル）を用いて表される。整合的異常項は正則化された有効作用の変換として与えられ、これはまた、有効作用から求められるエネルギー運動量テンソル（整合的エネルギー運動量テンソル）を用いて表される。重力異常項に対しても Bardeen と Zumino により代数的方法で共変的異常項と整合的異常項の相殺条件の同等性が示されている。我々は Banerjee らの議論を重力異常項に適用した。共変的エネルギー運動量テンソルを用いて正則化された有効作用を定義し、それにもとづく整合的エネルギー運動量テンソルを導入し、二つのエネルギー運動量テンソルの関係を求めた。その結果、共変的エネルギー運動量テンソルと整合的エネルギー運動量テンソルの差は共変的エネルギー運動量テンソルの functional curl で表されることがわかった。さらに、ヒートカーネルの方法を応用・拡張することにより、2次元でのエネルギー運動量テンソルの functional curl の値を具体的に求めることに成功した。

## 論文内容要旨 (英文)

氏名 竹内 雅陽論文題目 Heat kernel analyses of the relationships  
between covariant and consistent anomalies.

Four fundamental interactions among elementary particles are known to be described by the gauge theories. The gauge theories are also essential in constructing grand unified theories or higher dimensional theories to unify these fundamental interactions.

Our world is, as observed in weak interaction processes, consisted of the chiral (left-right asymmetric) matter fields. When these fields have gauge interactions, the gauge symmetries which are the starting points of gauge theories are not realized in quantum theory in general. This is called gauge anomaly. In higher dimensions, invariance of general coordinate transformation which is the basis of general relativity sometimes breaks in quantum theory. (This is called gravitational anomaly). To construct unified theories, we must consider models where anomalies from chiral fields are cancelled out. This condition of anomaly cancellation is an important restriction to construct realistic theories.

Gauge anomalies can be viewed in one of two ways, namely, covariant and consistent. Covariant anomalies are defined as covariant divergences of the covariant current, i.e., a covariant divergence of the covariantly regularized expectation value of the current. Consistent anomalies can be considered as gauge transformation of a regularized effective action. Consistent anomalies are also expressed as covariant divergences of the consistent current which is obtained by the regularized effective action. Consistent anomalies should satisfy the Wess-Zumino consistency condition.

Since consistency of gauge theories should not depend on these two anomalies, these anomalies must be equivalent. The covariant and consistent anomalies are actually known to be equivalent in the sense that they lead to the same anomaly-cancellation condition. Bardeen and Zumino have given a general proof for this equivalence of the anomalies using algebraic prescriptions. Their approach does not need any explicit form for the Lagrangians, thus giving model-independent results. Lagrangian-based field-theoretical approaches to the equivalence of the gauge anomalies have been given by Banerjee et al. They have investigated equivalence by introducing a regularized effective action defined through covariant current.

The method by Banerjee et al. is as follows. First, we define a regularized effective action by using the covariant current. We obtain a consistent current from this effective action. Banerjee et al. thus expressed the difference between covariant and consistent currents by the functional curl of the covariant current. They argued that the functional curl of the covariant current is proportional to the delta function. With the help of this, they have

derived the relationship between the covariant and consistent anomalies. Although their result agrees with Bardeen and Zumino, the property that the functional curl is proportional to the delta function is not clearly explained in their arguments. Thus, it is desirable to prove the behavior of the functional curl more explicitly.

Fujikawa and Suzuki gave a formal proof that the functional curl is proportional to the delta function.

Other study concerning the difference between the covariant and consistent currents have been reported by Osabe and Suzuki, where the functional curl does not appear in the arguments. They discussed the difference between covariant and consistent currents, which they defined by invoking different types of exponential regulators.

In the first part of this thesis, we described gauge anomalies. We use the heat kernel method to derive the anomalies. This method is known so far applicable to one point functions such as anomalies. The method, however, has not been applied to two points function like the functional curl. In this paper, we have also shown that this method can be applied to the functional curl, and we have succeeded to obtain the value of the functional curl explicitly in arbitrary even dimensions. The curl that we obtained agrees with that of Banerjee and Fujikawa et al.. Our result presents another direct proof that the functional curl is proportional to the delta function. We have also applied the heat kernel method to calculate Osabe and Suzuki's formal expression of the difference between the covariant and the consistent currents, and succeeded to obtain the value of this difference explicitly in two and four dimensions. These differences, which we obtained agree with previous results of Bardeen et al. and Banerjee et al..

In the second part of this thesis, we described gravitational anomalies. Gravitational anomalies can also be viewed in one of two ways, namely, covariant and consistent. Covariant gravitational anomalies are expressed by the covariantly regularized expectation values of the energy-momentum tensor (covariant energy-momentum tensor). Consistent gravitational anomalies can be considered as transformations of a regularized effective action. Consistent anomalies are also expressed as the energy-momentum tensor (consistent energy-momentum tensor) which is obtained by the regularized effective action. Bardeen and Zumino have also given a general proof for the equivalence of covariant and consistent gravitational anomalies by using algebraic prescriptions. We have applied the argument of Banerjee et al. to the gravitational anomalies. We have defined a regularized effective action using the covariant energy-momentum tensor, introduced the consistent energy-momentum tensor based on the effective action and obtained the relationship between these two energy-momentum tensors. We found that the difference between the covariant and consistent energy-momentum tensors is expressed by a functional curl of the covariant energy-momentum tensor. Furthermore, by applying the heat kernel method, we have succeeded to obtain the value of the functional curl of the energy-momentum tensor explicitly in two dimensions.

学位論文の審査及び学力確認の結果の要旨

平成 29 年 8 月 3 日

理工学研究科長 殿

論文博士論文審査委員会

主査 衛藤 稔

副査 遠藤 龍介

副査 新井 真人

副査 奥間 智弘

副査



学位論文の審査及び学力確認の結果を下記のとおり報告します。

記

論文申請者	氏名 竹内 雅陽		
論文題目	共変的異常項と整合的異常項との関係に対する ヒートカーネルの方法による解析		
学位論文審査結果	合格	論文審査年月日	平成 29 年 7 月 26 日～ 平成 29 年 8 月 2 日
論文公聴会	平成 29 年 8 月 2 日	場 所	理学部 13 番教室
学力確認結果	合格	学力確認年月日	平成 29 年 8 月 2 日

学位論文の審査結果の要旨 (1,000 字程度)

無矛盾な素粒子とその間の相互作用のモデルを構築する上で、量子異常項を調べることは重要である。特に、ゲージ異常項や重力異常項が相殺されていないと理論に破綻をきたすことになる。異常項の相殺条件を分析する際には、共変的異常項と整合的異常項と呼ばれる二つの立場のいずれかをとることになる。この二つの立場は、同一の相殺条件を導くべきものであるが、その同等性の証明は自明ではない。

本論文は、ゲージ異常項と重力異常項に対するこの同等性を扱ったものである。ゲージ異常項に対しては、(1)これまでの Banerjee 達によるカレントの汎関数回転を用いた証明の不備を指摘し、それを補完する議論を展開することで正しい証明を与えた；(2)Osabe と Suzuki による別証明のシナリオを具体的にやってみることで時空次元が 2 と 4 の場合の証明を実現した。重力異常項に対しては、(3)ゲージ場での Banerjee 達の方法を応用すると、エネルギー運動量テンソルの汎関数回転が現れることを示し、証明への道筋をつけた。その際、2次元時空での汎関数回転を具体的に求めて見せている。なお、上の(1)～(3)のテクニカルな計算部分では、ヒートカーネルの方法を拡張することで行っている。

提出された学位論文の精査、公聴会での発表（1時間）と質疑応答（50分）によって、学位論文審査基準を満たしているかを判定した。先行研究の不十分な点を適正に分析することで論理的に穴のない証明を完成させている点で、また異常項等に対して使われていたヒートカーネルの方法を汎関数回転の様な二点関数にも使えるように拡張している点で、新規性・独自性が見られ、学術的価値のあるものと認められる。学位論文の構成・体裁も適切であり、研究の背景や目的、結論も論理的に明確に述べられている。質疑応答でも、この分野の研究に必要な専門知識および素粒子物理学の一般的知識を持っていることが判定できた。以上のことにより、本学位論文は学位論文審査基準を十分に満たしているものと判断し、審査委員全員一致で合格と判定した。

本論文は、研究倫理又は利益相反等に係る学内規則に基づく手続きは必要ありません。

学力確認の結果の要旨

最終試験は、公聴会終了後に、学位論文と公聴会の発表資料に関連する事項について、口頭ならびに筆答によって行った（30分）。口頭試問では、学位論文で扱っている場の量子論や群論に関する基本的および専門的な知識等を問うた。論文内容については一部英語による質疑応答も行った。それらの受け答えから、申請者は博士の学位にふさわしい十分な専門知識と能力、英語力を有しているということが確認できた。これらにより、学力についても合格と判定した。