論文内容要旨（和文）

氏　名　佐藤　邦夫

論文題目　The Paley and the Hardy inequalities for the Jacobi and the Bessel expansions
(ヤコビ展開とベッセル展開に関する
ペーリーの不等式とハーディの不等式)

本論文では、ヤコビ級数展開とフーリエーベッセル級数展開に関し、実ハーディ空間において、ペーリーの不等式とハーディの不等式が成り立つことを実解析的手法を用いて証明する。また、優平均関数、劣平均関数を導入し、不等式を線形汎関数を用いて考察する。

単位円盤 $\mathbb{D}$ 上のハーディ空間 $H^1(\mathbb{D})$ とは、$\mathbb{D}$ 上で正則な関数で $\|F\|_{H^1} = \sup_{0<r<1}\int_0^{2\pi}|F(re^{i\theta})|\,d\theta < \infty$ を満足する関数よりなる空間である。ペーリーの不等式とハーディの不等式はこの関数空間 $H^1(\mathbb{D})$ に属する整級数 $F(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ に対して成り立つ不等式である：不等式 $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|/(n+1)\le C\|F\|_{H^1}$ をハーディの不等式と言い、不等式 $(\sum_{k=1}^{\infty}|a_{n_k}|^2)^{1/2}\le C\|F\|_{H^1}$ をペーリーの不等式と呼ぶ。ただし、$\{n_k\}$ はアダマールの間隙を持つ自然数列である。1926 年 Hardy と Littlewood は、$1<p\le 2$ のとき $L^p(-\pi,\pi)$ に属する関数 f のフーリエ係数 $c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-inx}\,dx$ が不等式 $\{\sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^p(1+|n|)^{p-2}\}^{1/p}\le C\|f\|_p$ を満たすことを示すとともに、$p=1$ の場合を考察し上述のハーディの不等式を得ることに成功した。ペーリーの不等式について言えば、1930 年 Zygmund が $1<p$ の場合に不等式 $\{\sum_{k=1}^{\infty}(|c_{-n_k}|^2+|c_{n_k}|^2)\}^{1/2}\le C\|f\|_p$ を証明した。Paley は、$p=1$ の場合を考え、1933 年に上に述べた自身の名を持つ不等式を得た。彼らの証明は複素解析的議論に深く依っている。

この論文では考える関数空間としてハーディ空間 $H^1(\mathbb{D})$ の実数部分境界関数よりなる実ハーディ空間 $\Re H^1$ を考える。実ハーディ空間においては、近時発展した (H^1, BMO) 双対性やアトム分解に依る特徴付けなどの実解析的手法が揃っている。このことにより、複素解析的手法が利用困難な対象、ヤコビ級数展開やフーリエーベッセル級数展開に対する解析が可能である。我々は、これら実解析的手法を利用してペーリー型とハーディ型の２つの不等式の成立を示すことができる。

第１章と第２章では、ヤコビ多項式が作る直交関数系に関するヤコビ級数展開におけるペーリーの不等式とハーディの不等式を考える。ここでいうヤコビ級数展開とは、指数 $\alpha,\beta>-1$ の n 次ヤコビ多項式 $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ を用いて、$R_n^{(\alpha,\beta)}(\theta)=t_n^{(\alpha,\beta)}P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta)(\sin\theta/2)^{\alpha+1/2}(\cos\theta/2)^{\beta+1/2}$ によって与えられる $L^2(0,\pi)$ における直交関数系 $\{R_n^{(\alpha,\beta)}\}$ に関する展開である。ここで、$t_n^{(\alpha,\beta)}$ は正規化の係数である。ヤコビ関数 $R_n^{(\alpha,\beta)}$ の直交性を持つ範囲を考慮し、空間は実ハーディ空間より自然に導入した $H^1(0,\pi)$ を用いる。第１章では、ヤコビの直交関数系 $\{R_n^{(\alpha,\beta)}\}$ に対して、

リプシッツ評価と概直交性を示し、BMO 関数が $H^1(0,\pi)$ 上の連続汎関数を与えることを利用してペーリーの不等式を証明する。第２章では第１章で得たヤコビ関数のリプシッツ評価に加え、アトム分解等を利用することによりヤコビ級数展開に関するハーディの不等式を証明する。更に、ペーリーの不等式とハーディの不等式いづれもが $L^1(0,\pi)$ 空間では不成立であることを示すことにより、関数空間 $H^1(0,\pi)$ 導入の必要性にも言及する。

第３章では、フーリエーベッセル級数展開におけるペーリーの不等式とハーディの不等式を証明する。ここで扱うフーリエーベッセル級数展開とは、$\lambda_1^{(\nu)},\dots,\lambda_n^{(\nu)},\dots$ を指数 $\nu>-1$ の第１種ベッセル関数 $J_\nu(x)$ の正の零点を小さいほうから並べた値の列とし、$\psi_n^{(\nu)}(x)=d_n^{(\nu)}\sqrt{\lambda_n^{(\nu)}x}J_\nu(\lambda_n^{(\nu)}x)$ とおいた $L^2(0,1)$ における直交関数系 $\{\psi_n^{(\nu)}\}$ に関する展開である。ただし、$d_n^{(\nu)}$ は正規化の係数である。フーリエーベッセル関数 $\psi_n^{(\nu)}(x)$ の定義域より、基本空間として非周期実ハーディー空間 $\mathcal{H}(\Delta)$ $(\Delta=[0,1])$ を考える。ペーリーの不等式の証明では、フーリエーベッセル関数のリプシッツ評価と概直交性に加え、(H^1,BMO) 双対性が大きな役割を果たす。また、リプシッツ評価に加え、Kashin と Saakyan による非周期の場合の Δ-アトム分解を利用して、フーリエーベッセル級数展開に関するハーディの不等式を示す。ヤコビ級数展開と同様に、ペーリーとハーディの両不等式が各々 $L^1[0,1]$ 上では成り立たないことを示し、これらの不等式が実ハーディ空間に固有の不等式であることを確認する。

第４章では、第３章までの証明で何度も利用したヘルダーの不等式等を線形汎関数の考えを導入することにより総括的に取り扱う。集合 X で定義された実関数の作る実線形空間 S、その部分集合 S_0 と R^n 内の領域 D を考え、D 上の実関数 ψ に劣平均関数、優平均関数を定義する。考える条件により劣平均、優平均の結論が導かれる。更に、D 上の実関数を具体的に与えることにより、ヘルダーーロジャーズの不等式やミンコフスキの不等式が得られる。

論文内容要旨（英文）

氏　名　佐藤　邦夫

論文題目　The Paley and the Hardy inequalities for the Jacobi and the Bessel expansions

The theory of real Hardy spaces, one of the significant theories in the field of harmonic analysis, provides powerful tools to analysis for orthogonal expansions. In this paper, applying some of those tools to analysis for the Jacobi expansions and the Fourier-Bessel expansions, we establish the inequalities of the Hardy type and of the Paley type in the real Hardy spaces with respect to these expansions.

Originally, the Paley inequality and the Hardy inequality have been proved for the Fourier series in the Hardy space on the unit disc in the complex plane. Complex-variable methods are crucial in their proofs. But, there are many other expansions, e.g., the Jacobi expansions and the Fourier-Bessel expansions, which are difficult to treat by complex-variable methods. Therefore, we introduce the real Hardy space to deal with those expansions by real-variable methods. Since we have useful tools such as the (H^1, BMO)-duality and the atomic decomposition of functions in the real Hardy space, real-variable methods allow us to obtain analogues of the Paley inequality and the Hardy inequality with respect to the Jacobi expansions and the Fourier-Bessel expansions by estimating the Lipschitz continuity and the almost orthogonality of the Jacobi plynomials and the Bessel functions. Also, by proving that the real Hardy space can not be replaced with the Lebesgue space L^1, we show that our inequalities are characteristic of the real Hardy space.

In the proofs of our above inequalities, we use repeatedly some fundamental inequalities, e.g., Hölder inequality. We introduce two notions which we call "subaveraging function" and "superaveraging function". Both the well-known Hölder-Rogers inequality and the Minkowski inequality can be unified through these notions.

学位論文の審査及び学力確認の結果の要旨

平成１８年２月１０日

理工学研究科長　殿

論文博士論文審査委員会
主査　河　村　新　蔵
副査　佐　藤　圓　治
副査　高　橋　眞　映
副査　勘　甚　裕　一

学位論文審査及び学力確認の結果を下記のとおり報告します。

記

１．論文申請者
氏　　名　佐　藤　邦　夫

２．論文題目（英文の場合は，その和訳を併記すること。）
The Paley and the Hardy inequalities for the Jacobi and the Bessel expansions
（ヤコビ展開とベッセル展開に関するペーリーの不等式とハーディの不等式）

３．学位論文公聴会
開催日　　平成１８年１月２７日
場　所　　理学部２号館519番教室

４．審査年月日
論文審査　　平成１８年１月２６日　～　平成１８年１月２７日
学力確認　　平成１８年１月２７日　～　平成１８年２月１０日

５．学位論文の審査及び学力確認の結果　（「合格」・「不合格」で記入すること。）
（1）学位論文審査　合格
（2）学　力　確　認　合格

６．学位論文の審査結果の要旨(1,200字程度)
別紙のとおり

７．学力確認の結果の要旨
別紙のとおり

別　紙

氏　名	佐　藤　邦　夫

学位論文の審査結果の要旨

著者は、本論文において，ヤコビ級数展開とフーリエーベッセル級数展開に関し，実ハーディー空間において，ペーリーの不等式とハーディーの不等式が成り立つことを実解析的手法で証明している．また，優平均関数，劣平均関数を導入し，種々の不等式をこれらの概念によって統一的に扱う手法を与えている．

本論文の意義を明確にするため，主要テーマであるペーリーの不等式とハーディーの不等式について，歴史的経緯を述べる．1926年ハーディーとリトルウッドは，2π周期関数のフーリエ係数 $c(n)$ について，それが p乗可積分関数 $(1<p\leqq 2)$ の係数であれば $|c(n)|^p$ が重み $|n|^{p-2}$ に関して総和可能であることを示した．ちなみに，$p=2$ のときが著名なベッセルの不等式を意味している．$p=1$（可積分関数）の場合には成り立たないが，彼らはハーディー空間と呼ばれる空間に属する関数に対しては $p=1$ として成り立つことを示した．ハーディー空間とは，複素平面の単位開円盤上で正則，その境界関数が可積分であるような境界関数の集まりである．ペーリーの不等式については，1930年ジグムンドが p乗可積分関数 $(1<p<2)$ のフーリエ係数について $|c(n)|^2$ が総和可能であることを導いた．ただし，総和はアダマールの間隙を持つ n についてのみ取るものとする．これに関して，ペーリーが $p=1$ の場合を考察し，この場合もハーディー空間に属する関数についてジグムンドの結果が同じ形で成り立つという，自身の名を持つ不等式を得た．彼らの証明は，複素解析的手法に深く依存するものであった．以上の歴史的経緯のもとで，全4章からなる本論文の内容と意義を述べる．

第1章では，ヤコビ級数に関して，ペーリー型の不等式を示している．対象となる関数は実ハーディー空間に属する関数である．実ハーディー空間とはハーディー空間に属する関数の実部からなる空間である．ここで，実ハーディー空間を考えるのは，近時発展したアトム分解などの実解析的手法が揃っているからである．ヤコビ級数に対しては，複素解析的手法を用いることは困難である．著者は，実ハーディー空間を対象に選び，上述の実解析的手法，特に (H^1,BMO) 双対性を駆使して結果を得ている．また本章の結果は古典的なペーリーの結果を含むものになっている．

第2章では，ヤコビ級数に関してハーディー型の不等式を示している．ここでは，アトム分解を有効に用いている．この結果も，古典的なハーディーの不等式を含むものである．

第3章では，第1，2章で用いたアイデアを利用して，フーリエーベッセル級数に対する区間(0,1)上の実ハーディー空間におけるペーリー型の不等式とハーディー型の不等式を証明している．

第4章では，この章までの証明に何度も利用されたヘルダーの不等式等を優平均関数，劣平均関数の概念を導入し，統一的に扱う手法を提案している．この提案は，今後の発展が期待されるものである．

以上のように，本論文では複素解析的手法では取り扱いが困難なヤコビ級数とフーリエーベッセル級数に対して，実ハーディー空間における種々の解析的手法を駆使し古典的な不等式であるハーディーの不等式とペーリーの不等式を証明することに成功している．これらは実解析的手法を適用するという著者のアイデアを待って初めて可能となり，高く評価出来るものである．また，論文の内容は4編（全て英語論文）の学術論文として発表済みである．本論文を，博士（理学）学位論文として合格と判定する．

学力確認の結果の要旨

本学の規定に従い，本論文及びそれに関連する分野に対し学力確認を口頭試問により行った．その結果，本学位申請者は研究に必要な基礎的能力と深い専門知識を持ち，今後，独自の観点から研究の構想を立ち上げ未解決な問題に取り組むことができると認められた．これにより審査員一同は，本学位申請者が博士にふさわしい研究実績と研究能力を有していると判断し，学力確認を合格と判定した．